МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи з курсу

«Математичне моделювання в економіці та менеджменті»

для студентів спеціальностей
6.03060101 «Менеджмент організацій та адміністрування»
та 6.03060104 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 20.03.2015 року

Харків
НТУ «ХПІ»
2015

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Математичне моделювання в економіці та менеджменті» для студентів спеціальностей 6.03060101 «Менеджмент організацій та адміністрування» та 6.03060104 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» / уклад. О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ «ХПІ», 2015. – 60 с.

Укладачі: О. Б. Білоцерківський
Н. В. Ширяєва

Рецензент П. В. Брінь

Кафедра менеджменту зовнішньоекономічної діяльності та фінансів

ВСТУП

В умовах України як самостійної держави зростає роль економіко-математичних методів як одного із засобів розвитку динамічно розвинутої та стійкої економіки з науково обґрунтованими шляхами розвитку та прогнозами на майбутнє.

Економіко-математичні методи – це узагальнена назва комплексу економіко-математичних підходів, об'єднаних для вивчення економіки та призначених для побудови, реалізації і дослідження економічних моделей.

Математичне моделювання в економіці та менеджменті – це використання математичного моделювання у рішенні господарських завдань і обґрунтуванні прийнятих рішень з керування виробництвом.

Мета курсу − формування системи знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей.

Завдання курсу − вивчення основних принципів та інструментарію постановки задач, побудови економіко-математичних моделей, методів їх розв'язування та аналізу з метою використання в економіці.

У курсі «Математичне моделювання в економіці та менеджменті» використовуються спеціальні розрахункові процедури, ситуаційні вправи, ділові ситуації.

Майбутній фахівець повинен

знати:

- основні поняття та визначення економіко-математичного моделювання;
- концептуальні основи та сфери використання економіко-математичного моделей;

- методи аналізу моделей та знаходження їх оптимальних значень.

Вміти:

- будувати математичні моделі економічних процесів;
- знаходити оптимальні рішення моделей, що побудовані;
- вміти оцінювати та аналізувати результати розрахунків;
- знаходити оптимальні маршрути, що мінімізують витрати;
- прогнозувати економічні явища на прикладі побудованої моделі;
- користуватися отриманими знаннями у реальному житті.

Курс «Математичне моделювання в економіці та менеджменті» тісно пов’язаний з такими фундаментальними та професійно орієнтованими курсами, як «Вища та прикладна математика», «Теорія ймовірностей і математична статистика», «Економетрія».

Знання цих дисциплін допоможуть зрозуміти способи обґрунтування прийнятих господарських рішень за допомогою кількісної оцінки економічних процесів і явищ.

Методичні вказівки містять:

✓ тестові завдання;

✓ розрахунково-графічні завдання для самостійного розв’язання та методичні вказівки до їх виконання;

✓ методичні вказівки до виконання індивідуальної роботи з дисципліни;

✓ контрольні запитання;

✓ рекомендовану літературу.

1. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання в економіці та менеджменті

1. Оптимізаційні моделі завжди забезпечують найкраще рішення у реальній ситуації:
а) так;
б) ні.

2. Модель може з успіхом замінити судження й досвід менеджера:
а) так;
б) ні.

3. Дані потрібні тільки після того, як модель вже побудована:
а) так;
б) ні.

4. Починаючи висувати гіпотези про існування якого-небудь зв'язку між даними, ви переходите до формулювання рівнянь моделі:
а) так;
б) ні.

5. Дані використовуються для побудови моделей:
а) так;
б) ні.

6. Модель – це:
а) часткове подання реальності;
б) абстракція;
в) наближення;
г) ідеалізація;
д) все перераховане вище.

7. Рішення у реальних бізнес-ситуаціях звичайно ґрунтуються на:
а) оцінці числових даних;
б) числових значеннях, отриманих за допомогою моделі;
в) використанні інтуїтивних подань;
г) всім перерахованим вище.

8. Умовна оптимізація має на увазі:
а) модель, що лежить в основі, є дуже точним поданням реальності;

б) досягнення найкращого можливого (у математичному змісті) результату з урахуванням обмежень;
в) усе вище наведене.

9. Менеджер, що бажає максимізувати прибуток і мінімізувати витрати:
а) повинен задати дві мети у своїй моделі;
б) може одержати бажаний результат при розв'язанні задачі максимізації (дохід мінус витрати);
в) повинен поставити перед собою недосяжне завдання і вибрати одну мету.

10. До основних понять економіко-математичного моделювання можна віднести:
а) мету;
б) модель;
в) економіко-математичну модель;
г) мішень;
д) а, б, в.

11. Вчені, які внесли значний вклад у розвиток економіко-математичного моделювання:
а) Толстой;
б) Канторович;
в) Гамільтон;
г) Пірсон;
д) Фішер.

12. У 50−60-х рр. виникають такі макроекономічні моделі:
а) голландська;
б) уортонська;
в) брукінгська;
г) шотландська;

13. За призначенням можна виділити такі економіко-математичні моделі:
а) сітьові;
б) ступеневі;
в) оптимізаційні;
г) балансові;

д) б, в, г;
е) а, в, г.

14. Процеси яких моделей можуть змінюватися за часом:
а) імітаційні;
б) аналітичні;
в) статичні;
г) динамічні;
д) багатокрокові.

15. За точністю математичного відображення явищ, що розглядаються, бувають такі моделі:
а) ймовірні;
б) лінійні;
в) нелінійні;
г) детерміновані;
д) змішані.

Тема 2. Задачі лінійного програмування

1. У моделюванні умови, що зменшують область припустимих розв'язків, називаються обмеженнями:
а) так;
б) ні.

2. Модель лінійного програмування (ЛП) необов'язково містить обмеження:
а) так;
б) ні.

3. Будь-яка модель, що містить цільову функцію, обмеження й змінні розв'язку, є моделлю ЛП:
а) так;
б) ні.

4. Обмеження задаються нерівностями типу «≥»:
а) так;
б) ні.

5. Умови невід'ємності змінних означають, що всі змінні розв'язку повинні бути додатні:

а) так;

б) ні.

6. Оскільки дробові значення змінних розв'язку можуть не мати фізичного змісту, то на практиці оптимальний розв'язок задач лінійного програмування (ЗЛП) часто округляється до цілочислових значень:

а) так;

б) ні.

7. Всі обмеження у лінійних моделях є нерівностями:

а) так;

б) ні.

8. Правильне визначення змінних розв'язку є ключовим етапом формування моделі:

а) так;

б) ні.

9. Оптимізаційна модель містить:

а) змінні розв'язку;

б) цільову функцію;

в) і те, й інше.

10. Оптимізаційна модель:

а) пропонує найкраще рішення у математичному змісті;

б) пропонує найкраще рішення з урахуванням обмежень;

в) може служити засобом оцінки різних варіантів можливих управлінських рішень;

г) усе вище перераховане.

11. Щоб полегшити інтерпретацію й документування моделей, можна використовувати такі можливості *Excel*:

а) виділення шрифтом;

б) зрушення вмісту комірок, що містить заголовки й результати;

в) підкреслення й заливання комірок;

г) рамки навколо комірок;

д) усе перераховане вище.

12. Обмеження звужує діапазон значень, які:
а) може приймати цільова функція;
б) можуть приймати змінні розв’язку;
в) жодне з указаних вище;
г) а, б.

13. У моделі максимізації:
а) знаходиться максимум цільової функції;
б) знаходиться максимум цільової функції, а потім визначається, чи є даний розв’язок припустимим;
в) знаходиться максимум цільової функції на безлічі припустимих розв’язків;
г) все перераховане вище.

14. Відмінною рисою моделей лінійного програмування (що виділяє їх із загального класу моделей математичного програмування) є те, що:
а) модель ЛП має цільову функцію й обмеження;
б) всі розглянуті функції лінійні;
в) знаходяться оптимальні значення змінних розв’язку.

15. Математичне формулювання моделі важливо тому, що:
а) дозволяє використовувати математичні методи;
б) більшість менеджерів воліє працювати із символічними моделями;
в) дозволяє менеджерові легко вирішити поставлене завдання;
г) дозволяє менеджерові відкласти ухвалення рішення, роблячи вигляд, що він зайнятий.

16. Вимоги невід’ємності включаються в модель ЛП, оскільки:
а) таку модель легше розв’язувати;
б) така модель більше відповідає реальній ситуації;
в) ні перше, ні друге;
г) і перше, і друге.

17. У табличній моделі функція обмеження подається формулою у комірці робочого аркуша:
а) так.
б) ні.

18. *Excel* можна використовувати для створення табличної моделі ЛП, але без засобу «Пошук розв’язання» оптимізувати модель не вдасться:

а) так.

б) ні.

19. Які з таких математичних виразів можуть зустрітися в моделі лінійного програмування:

а) $3x_1 + x_2 \leq \sqrt{5}$;

б) $x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2 = 5$;

в) $x_1 + \log x_2 = 5$;

г) $\sqrt{2}x_1 - \pi x_3 \leq e$.

20. Спільна частина будь-якої кількості опуклих множин називається:

а) прямокутником;

б) окружністю;

в) опуклою множиною;

г) увігнутою множиною.

21. Якщо фігура обмежена тільки прямими або їх відрізками, то кількість її кутових точок:

а) обмежена;

б) необмежена;

в) дорівнює кількості обмежень;

г) дорівнює кількості змінних.

22. Оберіть, які випадки можуть зустрітися при побудові розв’язків систем нерівностей:

а) безліч розв’язків;

б) одна точка;

в) порожня множина;

г) а, б, в.

23. Оберіть із перелічених нижче такі задачі, що можна віднести до ЗЛП:

а) сітьова модель;

б) задача про суміші;

в) задача про використання ресурсів;

г) задача про розкрій матеріалів;

д) а, в, г;

е) б, в, г.

Тема 3. Методи розв’язування задач лінійного програмування

1. Якими з наведених нижче методів можна розв’язати ЗЛП?

а) графічний метод;

б) симплекс-метод;

в) метод штучного базису;

г) а, б, в.

2. Графічний метод можна застосувати для ЗЛП із такою кількістю змінних:

а) 3;

б) 2,5;

в) 2.

3. На графіку обмеження ЗЛП подаються як:

а) багатокутник припустимих розв’язків;

б) градієнт;

в) лінія рівня.

4. Градієнт – це:

а) коефіцієнти при змінних у системі обмежень задачі;

б) часткові похідні цільової функції задачі;

в) вектор правих частин системи обмежень.

5. Якщо градієнт направлений у сторону багатокутника припустимих розв’язків (БПР) задачі та функція цілі направлена на максимум, то перша точка перетину лінії рівня та БПР є точкою:

а) максимуму;

б) мінімуму.

6. Якщо градієнт направлений у зворотну сторону від БПР задачі та функція цілі направлена на максимум, то перша точка перетину лінії рівня та БПР є точкою:

а) максимуму;

б) мінімуму.

7. Знайдені значення оптимальної точки визначають оптимальне значення:

а) функції цілі;

б) системи обмежень;

в) багатокутника припустимих розв’язків;

8. Лінію рівня можна переміщувати:

а) у напрямку зростання градієнта;

б) у напрямку, зворотному зростанню градієнта;

в) не можна нікуди переміщувати;

г) а, б.

9. Симплекс-метод – це:

а) хаотична обчислювальна процедура;

б) стрибкоподібна обчислювальна процедура;

в) поетапна обчислювальна процедура.

10. Звести задачу лінійного програмування до канонічного вигляду – це значить:

а) з нерівностей у системі обмежень зробити рівності;

б) у нерівностях системи обмежень змінити знак на протилежний;

в) помножити нерівності на (–1).

11. Як змінюється обмеження зі знаком «≥» при зведенні його до канонічного вигляду в симплекс-методі:

а) до обмеження у ліву частину додають змінну;

б) обмеження помножують на деяку змінну;

в) з лівої частини обмеження віднімають змінну.

12. Як змінюється обмеження зі знаком «≤» при зведенні його до канонічного вигляду в симплекс-методі:

а) до обмеження у ліву частину додають змінну;

б) обмеження помножують на деяку змінну;

в) з лівої частини обмеження віднімають змінну.

13. Згідно із теоремою про оптимальність опорного плану у симплекс-методі для задачі на максимум оберіть правильний варіант:

а) $\Delta_j = Z_j - C_j \geq 0$;

б) $\Delta_j = Z_j - C_j \leq 0$.

14. Згідно із теоремою про оптимальність опорного плану у симплекс-методі для задачі на мінімум оберіть правильний варіант:

а) $\Delta_j = Z_j - C_j \geq 0$;

б) $\Delta_j = Z_j - C_j \leq 0$.

15. До базису начального опорного плану у симплексну таблицю можна включати тільки:
а) лінійно незалежні невід’ємні (з «+1») одиничні вектори;
б) лінійно незалежні від’ємні (з «–1») одиничні вектори;
в) нелінійно залежні одиничні вектори.

16. Якщо умова оптимальності (теорема оптимальності) не виконується, то треба розрахувати нову симплексну таблицю за допомогою:
а) розв’язувального рядка;
б) розв’язувального стовпця;
в) розв’язувального елементу.

17. Метод штучного базису використовується, коли:
а) у системі обмежень не вистачає необхідної кількості одиничних лінійно незалежних невід’ємних (з «+1») векторів;
б) у системі обмежень не вистачає необхідної кількості одиничних лінійно незалежних від’ємних (з «–1») векторів.

18. Додаткові змінні у методі штучного базису називаються:
а) обов’язковими;
б) справжніми;
в) штучними;
г) залежними.

19. Як змінюється цільова функція у методі штучного базису, якщо початкова цільова функція (ЦФ) була на максимумі:
а) до ЦФ додається будь-яке велике додатне число М, помножене на штучні змінні;
б) від ЦФ віднімається будь-яке велике додатне число М, помножене на штучні змінні.

20. Як змінюється цільова функція у методі штучного базису, якщо початкова ЦФ була на мінімумі:
а) до ЦФ додається будь-яке велике додатне число М, помножене на штучні змінні;
б) від ЦФ віднімається будь-яке велике додатне число М, помножене на штучні змінні.

21. Необхідною умовою оптимальності опорного плану у методі штучного базису є така вимога:

а) жодної штучної змінної не повинно бути виведено із базису;
б) у процесі розв’язування задачі всі штучні змінні були виведені з базису і дорівнювали нулю;
в) у процесі розв’язування задачі лише половина штучних змінних повинна бути виведена з базису і дорівнювати нулю.

22. Чи має розв’язок вихідна задача, якщо М-задача не має розв’язку:
а) так;
б) ні;
в) можливо при деяких умовах.

Тема 4. Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

1. Двоїстою ЗЛП називається:
а) задача, що не має розв’язків;
б) задача, що роздвоюється;
в) допоміжна задача лінійного програмування;
г) задача, що доповнює основну.

2. Якщо цільова функція основної (вихідної) задачі досягає максимуму («max»), то цільова функція двоїстої задачі:
а) також досягає максимуму;
б) досягає мінімуму;
в) дорівнює «0»;
г) невизначена.

3. Якщо цільова функція основної (вихідної) задачі досягає мінімуму («min»), то цільова функція двоїстої задачі:
а) досягає максимуму;
б) також досягає мінімуму;
в) дорівнює «0»;
г) невизначена.

4. Система обмежень вихідної задачі подана рівняннями. Це означає, що:
а) система обмежень двоїстої задачі має знак «≥»;
б) система обмежень двоїстої задачі має знак «≤»;

в) невідомі змінні двоїстої задачі можуть набувати будь-яких значень (тобто «≥0» та «0≤»);
г) невідомі змінні двоїстої задачі можуть набувати значення «≥0» чи «0≤».

5. Якщо кожна із пари двоїстих задач задана в стандартній формі, то всі нерівності у задачі *максимізації* мають знак:
а) «≥»;
б) «≤».

6. Якщо кожна із пари двоїстих задач задана в стандартній формі, то всі нерівності в задачі *мінімізації* мають знак:
а) «≥»;
б) «≤».

7. Матриці коефіцієнтів при змінних у системах обмежень обох задач є:
а) транспонованими один до одного;
б) доповнювальними одна одну;
в) оберненими одна до одної.

8. Кількість нерівностей у системі обмежень однієї задачі збігається із кількістю змінних в іншій задачі:
а) так;
б) ні.

9. Умови невід'ємності змінних є в обох задачах:
а) так;
б) ні.

10. Чи треба для побудови двоїстої задачі звести всі нерівності вихідної задачі до одного змісту (до вигляду «≥», якщо мінімум, до вигляду «≤», якщо максимум)?
а) так;
б) ні.

11. Скільки взагалі існує теорем двоїстості?
а) жодної;
б) 1;
в) 2;
г) 3.

12. Згідно з першою теоремою двоїстості: якщо одна із взаємно двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має й інша, причому оптимальні значення їхніх цільових функцій…:

а) $Z_{\max} > F_{\min}$;

б) $Z_{\max} < F_{\min}$;

в) $Z_{\max} = F_{\min}$.

13. Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається так:

а) $Y^* = \vec{C}_{баз} D^{-1}$;

б) $Y^* = \vec{C}_{баз} D^{T}$;

в) $Y^* = \vec{B} D^{-1}$.

14. Якщо ж цільова функція однієї із задач необмежена, то друга задача:

а) взагалі не має розв'язків;

б) дорівнює *максимуму*;

в) дорівнює *мінімуму.*

Тема 5. Цілочислове програмування

1. На практиці часто виконується округлення компонентів розв'язку ЗЛП, щоб задовольнити вимозі цілочисловості змінних розв'язку:

а) так;

б) ні.

2. У загальному випадку розв'язати задачу цілочислового лінійного програмування (ЦЛП) не складніше, ніж розв'язати задачу ЛП:

а) так;

б) ні.

3. Перший крок в одержанні округленого розв'язку для моделі частково цілочислового ЛП полягає у розв'язанні її спрощеної ЗЛП (без умови цілочисловості змінних):

а) так;

б) ні.

4. У моделі ЦЛП:

а) за винятком обмежень цілочисловості всі функції обмежень лінійні;

б) всі змінні розв'язку повинні бути цілими;

в) всі змінні розв'язку повинні бути невід'ємними;

г) а, б.

5. У спрощенні моделі ЦЛП:

а) допускається нелінійність цільової функції;

б) ігноруються обмеження цілочисловості для змінних розв'язку;

в) послабляються обмеження невід'ємності для змінних розв'язку;

г) все перераховане вище.

6. Оптимізація моделі за допомогою методу «гілок і меж»:

а) починається з розв'язання спрощеної ЗЛП даної моделі;

б) вимагає оптимізації багатьох моделей ЛП, якщо розв'язок первісної спрощеної ЗЛП містить дробові значення цілочислових змінних;

в) при наявності дробового значення цілочислової змінної потрібно додати обмеження до вихідної спрощеної моделі ЛП;

г) все перераховане вище.

7. Для розв'язання ЗЦП існують методи, які поділяються на три групи. Оберіть той метод, яким не можна розв'язати ЗЦП:

а) графічний метод;

б) комбінаторні методи;

в) наближені методи;

г) методи відтинання.

8. При розв'язанні ЗЦП методом Гоморі до обмежень задачі додається нове обмеження, що володіє деякими властивостями. Оберіть яка властивість нового обмеження не є правильною:

а) обмеження повинно бути лінійним;

б) повинно відтинати знайдений оптимальний нецілочисловий план;

в) не повинно відтинати жодного цілочислового плану.

г) а, б, в.

9. Як називається додаткове обмеження, що володіє всіма властивостями у методі Гоморі?

а) точним;

б) правильним;

в) неправильним.

10. Якщо у процесі розв’язання з’явиться рівняння з нецілим вільним членом і цілими іншими коефіцієнтами, то відповідне рівняння:
а) має розв’язок у цілих числах;
б) не має розв’язку в цілих числах.

11. Суть методу «гілок і меж» полягає (оберіть правильний варіант):
а) в упорядкованому переборі варіантів і розгляді лише тих з них, які виявляються за певними ознаками перспективними, і відкиданні безперспективних варіантів;
б) в упорядкованому переборі варіантів і розгляді всіх із них без будь-яких додаткових обмежень.

12. Графічно метод «гілок і меж» можна подати у вигляді:
а) гілки;
б) межі;
в) дерева:
г) мережі.

Тема 6. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем

1. Прикладну задачу, що містить нелінійний зв’язок, не можна описати за допомогою моделі ЛП:
а) так;
б) ні.

2. Якщо у деякій точці виконані необхідні умови локального максимуму, то ця точка є точкою локального максимуму:
а) так;
б) ні.

3. Чи може пряма лінія бути опуклою або увігнутою функцією?
а) так;
б) ні.

4. Модель нелінійного програмування (НЛП) завжди є опуклою або увігнутою моделлю:
а) так;
б) ні.

5. Однією із проблем у НЛП є необхідність відрізняти локальні розв’язки від глобальних:
а) так;
б) ні.

6. Множина обмежень, що задана нерівностями: $9x + 4y \leq 36$, $4x + 12y \leq 20$, є опуклою:
а) так;
б) ні.

7. Нехай f – функція однієї змінної. Нерівність $f'' > 0$:
а) є необхідною умовою локального (умовного) мінімуму;
б) є необхідною умовою локального (умовного) максимуму;
в) є достатньою умовою локального (умовного) максимуму;
г) жодне з перерахованих вище тверджень не є правильним.

8. Нехай f – функція однієї змінної. Нерівність $f'(x^*) = 0$:
а) є необхідною умовою, щоб точка x^* була точкою локального максимуму;
б) є необхідною умовою, щоб точка x^* була точкою локального мінімуму;
в) є необхідною умовою, щоб точка x^* була точкою глобального мінімуму;
г) правильні всі перераховані вище твердження.

9. Точка x^*, для якої $f'(x^*) = 0$ і $f''(x^*) > 0$, задовольняє достатній умові:
а) локального максимуму;
б) локального мінімуму;
в) два твердження неправильні.

10. Для увігнутих моделей:
а) більш корисні умови другого порядку;
б) будь-який локальний оптимум є глобальним;
в) безліч обмежень і цільова функція повинні бути увігнутими.

11. Опуклість – це:
а) поняття, що застосовується як до множини точок, так і до функцій;
б) важлива математична властивість, яка гарантує, що локальні розв’язки є також і глобальними;
в) корисна як у безумовній, так і в умовній оптимізації;
г) усе вище перераховане.

12. Яке з висловлень справедливо відносно кутових розв’язків ЗНП?

а) незалежно від форми цільової функції оптимальний розв'язок завжди буде перебувати у кутовій точці;
б) кутові точки можуть бути розв'язками тільки при нелінійній цільовій функції;
в) у загальному випадку оптимум може перебувати не в кутовій точці.

13. Основні результати в НЛП отримані для випадків, коли:
а) система обмежень нелінійна, а цільова функція лінійна;
б) система обмежень і цільова функція нелінійні;
в) система обмежень лінійна, а цільова функція нелінійна;
г) система обмежень і цільова функція лінійні.

14. Теорему Куна − Таккера називають ще теоремою про сідлову точку, оскільки:
а) вченим подобалися верхові прогулянки;
б) у той час проводилися змагання з кінного спорту;
в) теорема встановлює зв'язок між неоптимальним розв'язком ЗНП і сідловою точкою функції Лагранжа;
г) теорема встановлює зв'язок між оптимальним розв'язком ЗНП і сідловою точкою функції Лагранжа;
д) теорема встановлює зв'язок між оптимальним розв'язком ЗЛП і сідловою точкою функції Лагранжа.

Тема 7. Моделі динамічного програмування

1. Динамічне програмування (ДП) пристосоване до операцій, в яких процес прийняття рішень можна розбити на низку послідовних кроків. Такі операції називаються:
а) стрибкоподібними;
б) багатоступінчатими;
в) багатокроковими.

2. Суть методу ДП полягає у заміні:
а) багатьох кроків на один;
б) однієї задачі з багатьма змінними низкою послідовно розв'язувальних задач з суттєво меншою кількістю;
в) багатьох задач у одну;
г) одного кроку (етапу) на декілька непослідовних етапів.

3. Якою властивістю не володіє задача ДП?
а) відсутністю післядії;
б) відсутністю зворотного зв'язку;
в) адитивністю;
г) дистрибутивністю.

4. Цільова функція s_k задачі ДП є показником ефективності керованої операції, що розглядається, та залежить від:
а) початкового стану та керування;
б) кінцевого стану та керування;
в) початкового стану та початкового керування;
г) кінцевого стану та кінцевого керування.

5. Стан s_k системи наприкінці k-го кроку залежить тільки від:
а) попереднього стану s_{k-1} і керування на k-му кроці X_k, залежить від попередніх станів і керувань;
б) попереднього стану s_{k-1} і керування на k-му кроці X_k, не залежить від попередніх станів і керувань.

6. На кожному кроці керування X_k залежить від:
а) кінцевої кількості керуючих змінних;
б) кінцевої кількості параметрів.

7. На кожному кроці стан s_k залежить від:
а) кінцевої кількості керуючих змінних;
б) кінцевої кількості параметрів.

8. Закінчіть формулювання принципу оптимальності Беллмана:
«Яким би не був стан s системи у результаті будь-якої кількості кроків, на найближчому кроці керування потрібно вибирати так, щоб воно в сукупності з оптимальним керуванням на всіх наступних кроках приводило до…»:
а) максимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний;
б) мінімального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний;
в) оптимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний.

9. Які з наведених нижче формул називаються рівняннями Беллмана:
а) $Z_n^*(s_{n-1}) = \max\limits_{\{X_n\}} f_n(s_{n-1}, X_n)$;
б) $Z_k^*(s_{k-1}) = \max\limits_{\{X_k\}} \{f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k-1}^*(s_{k-1})\}$;

в) $Z_{n-1}^{*}(s_{n-2}) = \max\limits_{\{X_{n-1}\}} \{f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_{n}^{*}(s_{n-1})\}$;

г) $Z_{k}^{*}(s_{k-1}) = \max\limits_{\{X_{k}\}} \{f_{k}(s_{k-1}, X_{k}) + Z_{k+1}^{*}(s_{k})\}$.

10. Процес розв'язання рівнянь на умовний максимум цільової функції на кожному кроці називається:
а) умовною оптимізацією;
б) послідовною оптимізацією;
в) покроковою оптимізацією.

Тема 8. Теорія ігор

1. Основна задача теорії ігор – це обґрунтування рішення в умовах невизначеності:
а) так;
б) ні.

2. У теорії ігор аналізуються ситуації, в яких зіштовхуються інтереси двох і більше сторін. Такі ситуації називаються:
а) спірними;
б) штовхальними;
в) конфліктними.

3. Як називається гра, якщо в ній беруть участь два гравця?
а) множинною;
б) конфліктною;
в) парною.

4. Гра називається грою з нульовою сумою, якщо:
а) виграш одного із гравців дорівнює програшу іншого;
б) виграш одного із гравців дорівнює виграшу іншого;
в) програш одного із гравців дорівнює програшу іншого.

5. Особистий хід гравця – це:
а) свідомий вибір гравцем однієї з можливих дій;
б) випадково обрана дія;
в) перегони.

6. Випадковий хід гравця – це:
а) свідомий вибір гравцем однієї з можливих дій;

б) випадково обрана дія;
в) перегони.

7. Стратегія гравця – це сукупність правил, що визначають вибір його дії:
а) при кожному випадковому ході залежно від сформованої ситуації;
б) при кожному особистому ході незалежно від сформованої ситуації;
в) при кожному випадковому ході незалежно від сформованої ситуації;
г) при кожному особистому ході залежно від сформованої ситуації.

8. Нижня ціна гри або максимальний виграш – це:
а) гарантований виграш гравця *A* при будь-якій стратегії гравця *B*;
б) гарантований програш гравця *A* при будь-якій стратегії гравця *B*.

9. Верхня ціна гри або мінімаксний виграш – це:
а) гарантований виграш гравця *B* при будь-якій стратегії гравця *A*;
б) гарантований програш гравця *B* при будь-якій стратегії гравця *A*.

10. Якщо $\alpha = \beta$ або $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = v,$ то гра називається:
а) кінцевою грою;
б) початковою грою;
в) грою із сідловою точкою;
г) грою зі змішаними стратегіями.

11. При зведенні матричної гри без сідлової точки до ЗЛП:
а) розв’язання сформульованої гри зводиться до розв’язання пари двоїстих симетричних ЗЛП;
б) розв’язання сформульованої гри зводиться до розв’язання простої ЗЛП симплекс-методом;
в) розв’язання сформульованої гри зводиться до розв’язання ЗЛП графічним методом.

Тема 9. Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія

1. Дайте визначення економетрії:

а) наука, що вивчає вимірність зв'язків у відповідному економічному аналізі;
б) наука, що застосовує математичні та математико-статистичні методи в економіці;
в) наука, що вивчає методи оцінювання параметрів моделей, які характеризують кількісні взаємозв'язки між економічними показниками.

2. Економетрична модель є:

а) стохастичною;
б) детермінованою;
в) структурною.

3. Економетричні моделі за способом математичного подання поділяють на такі:

а) прості та складні;
б) однофакторні та багатофакторні;
в) динамічні та статичні.

4. Зазначте найсуттєвішу задачу економетричного дослідження:

а) побудова економетричних моделей;
б) оцінка та перевірка економетричних моделей;
в) прогнозування економічних процесів на основі економетричних моделей.

5. Залежність між величинами x та y називається статистичною, якщо:

а) кожному значенню x відповідає лише одне значення y, яке обчислюється за відомою формулою;
б) змінювання однієї величини зумовлює змінювання розподілу іншої;
в) змінювання величини x зумовлює змінювання y за заданим законом.

6. Регресійні рівняння описують:

а) структурний зв'язок між показниками економічних процесів;
б) функціональний зв'язок між суб'єктами економічної діяльності;
в) кореляційний зв'язок між економічними показниками.

7. Для оцінювання параметрів економетричної моделі застосовують:

а) закон нормального розподілу Гаусса;
б) критерій Стьюдента;
в) метод найменших квадратів.

8. Показник, що визначає міру зв'язку залежної змінної з усіма незалежними змінними, називається:
а) коефіцієнтом кореляції;
б) стандартною похибкою рівняння;
в) коефіцієнтом детермінації.

9. Коефіцієнт кореляції змінюється в межах:
а) від 0 до 1;
б) від −1 до 0;
в) від −1 до 1.

10. Оцінку параметра b_1 парної регресії можна знайти за формулою:
а) $b_1 = r\dfrac{s_x}{s_y}$;
б) $b_1 = r \cdot s_x s_y$;
в) $b_1 = r\dfrac{s_y}{s_x}$.

11. Умова гомоскедастичності полягає в тому, що:
а) дисперсія збурювання ε_i є постійною величиною для будь-якого номера i;
б) дисперсія збурювання ε_i є змінною величиною для будь-якого номера i;
в) дисперсія збурювання ε_i дорівнює нулю для будь-якого номера i.

12. Дисперсія збурювання визначає:
а) вплив детермінованих факторів;
б) вплив неврахованих факторів та помилок регресії;
в) все перелічене правильно.

13. Оцінка параметра називається ефективною, якщо:
а) задовольняє закон великих чисел;
б) має найменшу дисперсію;
в) математичне сподівання її дорівнює значенню параметра.

14. Оцінка параметра називається обґрунтованою, якщо:
а) задовольняє закон великих чисел;
б) отримана за методом найменших квадратів;
в) має найменшу дисперсію.

15. Критерій Стьюдента використовується для оцінки статистичної значущості:

а) параметрів моделі;

б) коефіцієнта кореляції;

в) як параметрів моделі, так і коефіцієнта кореляції.

16. Якщо регресійна модель задовольняє основним передумовам регресійного аналізу, то оцінки b_0, b_1 мають:

а) найбільшу дисперсію в класі всіх незміщених лінійних оцінок;

б) найменшу дисперсію в класі всіх незміщених лінійних оцінок;

в) середню дисперсію в класі всіх незміщених лінійних оцінок.

17. Для перевірки значущості окремого параметра використовують:

а) F-тест;

б) t-тест;

в) χ^2-тест;

г) експонентний розподіл.

18. Для перевірки значущості одночасно всіх параметрів використовують:

а) F-тест;

б) t-тест;

в) χ^2-тест;

г) експонентний розподіл.

19. Коефіцієнт детермінації вимірює:

а) варіацію незалежної змінної;

б) нахил лінії регресії;

в) перетин лінії регресії;

г) загальну варіацію залежної змінної, що пояснюється регресією;

д) завжди дорівнює 1.

20. Коефіцієнт детермінації набуває значення:

а) від 0 до 1;

б) від –1 до 0;

в) від –1 до 1.

21. Коефіцієнт детермінації визначається за формулою:

а) $R^2 = 1 - \dfrac{Q_R}{Q}$; б) $R^2 = \dfrac{Q_R}{Q}$; в) $R^2 = 1 - \dfrac{Q}{Q_R}$.

22. Коефіцієнт детермінації:

а) характеризує абсолютну величину розкиду випадкової складової рівняння;

б) показує, яка частина руху залежної змінної описується даним регресійним рівнянням;

в) визначає міру зв'язку залежної змінної з усіма незалежними факторами.

23. Коефіцієнт детермінації визначається за формулою:

а) $R^2 = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\operatorname{var}(y)}}$; б) $R^2 = \dfrac{\operatorname{cov}^2(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\operatorname{var}(y)}}$; в) $R^2 = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{var}(x)\operatorname{var}(y)}$.

24. Співвідношення $R^2 = r^2$ виконується у випадку:

а) лінійної парної регресії;

б) нелінійної парної регресії;

в) множинної регресії.

Тема 10. Лінійні моделі множинної регресії

1. Обернена матриця існує, якщо:

а) $\Delta(X'X)^{-1} = 0$; б) $\Delta(X'X)^{-1} > 0$; в) $\Delta(X'X)^{-1} \neq 0$.

2. Для оцінювання параметрів множинної регресійної моделі застосовують:

а) закон нормального розподілу Гаусса;

б) метод найменших квадратів;

в) критерій Стьюдента.

3. У множинній регресії кожен параметр показує:

а) загальний вплив всіх незалежних змінних на залежну змінну;

б) вплив незалежної змінної на залежну змінну при умові, якщо всі інші незалежні змінні залишаються постійними;

в) де площина регресії перетинає вісь Y;

г) як частковий, так і загальний вплив незалежних змінних.

4. Стандартизовані коефіцієнти еластичності визначаються за формулою:

а) $E'_j = b_j \dfrac{\bar{x}_j}{\bar{y}}$; б) $E'_j = b_j \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}_j}$; в) $E'_j = b_j \dfrac{S_{x_j}}{S_y}$.

5. Критерій Фішера застосовується для перевірки значущості:
а) оцінок параметрів моделі;
б) економетричної моделі;
в) коефіцієнта множинної кореляції.

6. Довірчі інтервали функції регресії визначаються за допомогою:
а) t-критерію Стьюдента та залишкової дисперсії;
б) стандартної похибки рівняння;
в) стандартної похибки параметрів.

7. Точковий прогноз – це:
а) побудова регресійної залежності за заданими точками;
б) значення залежної змінної, обчислене за моделлю при заданому значенні пояснюючих змінних;
в) визначення крайніх точок довірчого інтервалу для прогнозного значення залежної змінної.

8. Статистична значущість визначається за допомогою:
а) стандартної похибки рівняння;
б) t-критерію Стьюдента;
в) F-критерію Фішера.

9. Дисперсія прогнозу для середнього значення залежної змінної обчислюється за формулою:
а) $\sigma^2 = \sigma_u^2 X_0'\left(X'X\right)^{-1} X_0$; б) $\sigma^2 = \sigma_u \sqrt{X_0'\left(X'X\right)^{-1} X_0}$;
в) $\sigma^2 = \sqrt{\sigma_u^2 (1 + X_0'\left(X'X\right)^{-1} X_0)}$.

10. Стандартна похибка рівняння обчислюється за формулою:
а) $S_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2$; б) $S_u^2 = \frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2$; в) $S_u = \sqrt{R^2}$.

11. Стандартна похибка рівняння:
а) показує, яка частина руху залежної змінної описується даним регресійним рівнянням;
б) характеризує величину розкиду випадкової складової рівняння;
в) визначає міру зв’язку залежної змінної з усіма незалежними факторами.

12. Стандартні похибки параметрів:
а) визначають внесок кожної незалежної змінної в дисперсію результативного фактора;

б) показують статистичну значущість параметрів;
в) визначають міру зв'язку кожного незалежного фактора із залежною змінною.

13. Коефіцієнт множинної кореляції може бути визначений:
а) через коефіцієнти парних кореляцій між факторними ознаками;
б) через коефіцієнти парних кореляцій між факторними та результуючою ознаками;
в) за допомогою перетворення Фішера.

14. Мультиколінеарність має місце, коли:
а) дві або більше незалежних змінних мають високу кореляцію;
б) дисперсія випадкових величин непостійна;
в) справжні та лагові значення помилок корелюють;
г) незалежна змінна вимірюється з помилкою;
д) ми будуємо неправильну версію правильної моделі.

15. Явище мультиколінеарності виникає, якщо:
а) існує лінійний зв'язок між незалежними змінними;
б) дисперсія залишків стала для кожного спостереження;
в) існує лінійна залежність між послідовними членами ряду залишків.

16. Наявність мультиколінеарності перевіряється за допомогою:
а) μ-критерію;
б) алгоритму Фаррара − Глобера;
в) методу Дарбіна.

17. Фіктивні змінні набувають значення:
а) 0 та 1; б) –1 та 1; в) –1 та 0.

18. Критерій Чоу використовується, якщо:
а) є дві вибірки, одна з яких велика, та виникає задача про їхнє об'єднання;
б) є дві вибірки, одна з яких невелика, та виникає задача про їхнє об'єднання;
в) є одна вибірка, та виникає завдання про її поділ на дві вибірки.

19. Регресійна модель, що нелінійна за змінними, має вигляд:
а) $y_i = \beta_0 \cdot x_{i1}^{\beta_1} \cdot x_{i2}^{\beta_2} \cdot \varepsilon_i$;
б) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1}^2 + \beta_2 \sqrt{x_{i2}} + \varepsilon_i$;
в) $y_i = e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i}$.

20. Виробнича функція − це:

а) діяльність деякого підприємства, спрямована на виробництво певного виду продукції;

б) система взаємозв'язків, які встановлюються між виробничими одиницями (підрозділами підприємства) у процесі їх функціонування;

в) залежність між обсягом виробленої продукції та спожитими для цього певними ресурсами.

21. Економетрична модель, яка кількісно описує зв'язок основних результативних показників виробничо-господарської діяльності з факторами, що визначають ці показники, називається:

а) показниковою функцією;

б) виробничою функцією;

в) моделлю розподіленого лага.

22. Зв'язок між економічними характеристиками випуску продукції та спожитими для цього ресурсами визначається економіко-математичним співвідношенням:

а) $Y = \alpha(1+r)^x$; б) $Y = \alpha F^{\alpha} L^{\beta}$; в) $Y = e^{\alpha\beta+\gamma}$.

23. Функція Кобба − Дугласа $\frac{Y}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$ є враховує:

а) технічний прогрес;

б) розширення виробництва;

в) інфляцію.

24. Економетрична модель $y = a_0 + a_1 x_1^{b1} + a_2 x_2^{b2} + e$ є:

а) статичною регресійною лінійною моделлю;

б) функцією Кобба − Дугласа;

в) нелінійною багатофакторною моделлю.

Тема 11. Узагальнені економетричні моделі

1. Якщо дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження чи групи спостережень, то маємо явище:

а) автокореляції;

б) гетероскедастичності;

в) мультиколінеарності.

2. Якщо дисперсія залишків стала для кожного спостереження, то маємо явище:

а) автокореляції;

б) мультиколінеарності;

в) гомоскедастичності.

3. За наявності гетероскедастичності параметри моделі оцінюються за:

а) умовним методом найменших квадратів:

б) узагальненим методом найменших квадратів (УМНК);

в) двокроковим методом найменших квадратів.

4. Якщо виникає явище гетероскедастичності, оцінки параметрів моделі, отримані за МНК, будуть:

а) необґрунтованими;

б) зміщеними;

в) неефективними.

5. При використанні УМНК оцінки параметрів моделі будуть:

а) незміщеними, спроможними та ефективними;

б) зміщеними, спроможними та ефективними;

в) незміщеними, неспроможними та ефективними;

г) зміщеними, неспроможними та ефективними.

6. За наявності гетероскедастичності для оцінювання параметрів застосовують метод:

а) Дарбіна;

б) Ейткена;

в) Фаррара − Глобера.

7. Явище гетероскедастичності виникає, якщо:

а) існує взаємозалежність послідовних членів часового ряду;

б) дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження чи групи спостережень;

в) існує лінійний зв’язок між незалежними змінними моделі.

8. Критерій Глейсера застосовується для виявлення:

а) автокореляції;

б) гетероскедастичності;

в) мультиколінеарності.

9. Для знаходження УМНК-оцінок необхідно:
а) знати математичне очікування помилок;
б) знати коваріаційну матрицю;
в) довести непостійність дисперсії помилок;
г) знати закон розподілу помилок.

10. Для перевірки моделі на гетероскедастичність використовують:
а) метод Феррара − Глобера;
б) критерій Стьюдента;
в) міру Неймана − Голдштейна;
г) тест Голдфелда − Квандта.

Тема 12. Економетричні моделі динаміки

1. Якщо існує взаємозалежність послідовних членів часового чи просторового ряду, то маємо явище:
а) гетероскедастичності;
б) автокореляції;
в) мультиколінеарності.

2. Автокореляція – це кореляція між:
а) відповідними за моментом часу значеннями двох часових рядів;
б) членами одного часового ряду;
в) членами часових рядів.

3. Явище автокореляції виникає, якщо:
а) дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження;
б) існує нелінійний зв'язок між незалежними змінними;
в) існує взаємозалежність послідовних елементів ряду залишків.

4. В адитивних моделях декомпозиції часових рядів сезонна складова може бути:
а) невід'ємна як більше, так і менше 1; б) невід'ємна; в) як невід'ємна, так і від'ємна; г) за модулем менше 1.

5. У мультиплікативних моделях декомпозиції часових рядів сезонна складова може бути:
а) невід'ємна як більше, так і менше 1; б) невід'ємна; в) як невід'ємна, так і від'ємна; г) за модулем менше 1.

6. Критерій Дарбіна − Уотсона застосовується для виявлення:
а) автокореляції;
б) гомоскедастичності;
в) мультиколінеарності.

7. У моделі може мати місце значна автокореляція, якщо за критерієм Дарбіна − Уотсона:
а) $d = 2$; б) $d = 0$; в) $d = 0$ чи $d = 4$.

8. Не можна підтвердити чи спростувати наявність автокореляції відхилень за критерієм Дарбіна − Уотсона, якщо:
а) $d = 0$ чи $d < d_1$;
б) $d = 2$ чи $d_1 < d < d_2$;
в) $d = 4$ чи $d > (4 - d_1)$;
г) $d_1 < d < d_2$ чи $(4 - d_2) < d < (4 - d_1)$.

9. Говорять про наявність невід’ємної автокореляції відхилень, якщо за критерієм Дарбіна − Уотсона:
а) $d = 0$ чи $d < d_1$;
б) $d = 2$ чи $d_1 < d < d_2$;
в) $d = 4$ чи $d > (4 - d_1)$.

10. Метод найменших квадратів у випадку автокореляції відхилень дає:
а) незміщені, спроможні та ефективні оцінки параметрів моделі;
б) незміщені та спроможні оцінки параметрів моделі;
в) незміщені оцінки параметрів моделі.

11. Говорять про наявність від’ємної автокореляції відхилень, якщо за критерієм Дарбіна − Уотсона:
а) $d = 0$ чи $d < d_1$;
б) $d = 2$ чи $d_1 < d < d_2$;
в) $d = 4$ чи $d > (4 - d_1)$.

12. Для оцінки параметрів моделі з автокорельованими залишками використовують:
а) метод рідж-регресії;
б) узагальнений метод найменших квадратів;
в) метод Дарбіна − Уотсона;
г) метод Глейсера.

13. Які з методів оцінки параметрів моделі з автокорельованими залишками передбачають використання відомої їх коваріаційної матриці:

а) метод Кохрейна − Оркатта;

б) метод Хілдрета − Лу;

в) метод Ейткена;

г) метод Дарбіна.

14. За наявності автокореляції параметрів застосовується:

а) непрямий метод найменших квадратів;

б) метод Фаррара − Глобера;

в) узагальнений метод найменших квадратів.

15. Інструментальні змінні – це змінні, що:

а) тісно корелюють з регресорами та не корелюють з помилками;

б) тісно корелюють з помилками та не корелюють з регресорами;

в) тісно корелюють з регресорами та помилками.

16. Оцінки параметрів рівняння регресії, що знайдені методом інструментальних змінних:

а) спроможні та незміщені;

б) спроможні та зміщені;

в) неспроможні та зміщені.

17. Вимірювання зв’язку між економічними показниками з урахуванням часових зсувів виконується на основі:

а) динамічних моделей;

б) моделей розподіленого лага;

в) систем структурних рівнянь.

18. Моделі, в яких на залежні змінні впливають значення незалежних змінних у попередні періоди, називаються:

а) динамічними;

б) дистрибутивно-лаговими;

в) структурними.

19. Моделі, що містять лагові значення залежної змінної, називаються:

а) моделями розподіленого лага;

б) авторегресійними моделями;

в) моделями сезонних коливань.

20. Побудова моделей розподіленого лага ускладнена через наявність:

а) автокореляції;

б) мультиколінеарності;

в) гетероскедастичності.

21. Для оцінювання параметрів моделей розподіленого лага застосовують:

а) непрямий МНК;

б) трикроковий МНК;

в) ітераційний метод.

2. РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ

Головна мета розв'язання розрахунково-графічних завдань – це поглиблення знань з побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей в економіці .

В умовах ринкових відносин фахівець самостійно приймає те чи інше економічне рішення. То ж необхідно навчитись самостійно проводити розрахунки, мати свій погляд на ту чи іншу проблему або ситуацію. Вивчення курсу передбачає освоєння знань, які висвітлюють питання, що стосуються побудови економіко-математичних моделей, методів їх розв'язування та аналізу з метою використання в економіці. Студент повинен вміти виконувати відповідні економічні розрахунки за кожним видом економіко-математичної моделі.

Студент повинен вміти будувати математичні моделі економічних процесів; знаходити оптимальні рішення моделей, що побудовані; оцінювати та аналізувати результати розрахунків; знаходити оптимальні маршрути, що мінімізують витрати; прогнозувати економічні явища на прикладі побудованої моделі; користуватися отриманими знаннями у реальному житті.

Задача 1. *Задача про використання ресурсів (задача планування виробництва)*

Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують чотири види ресурсів S_1, S_2, S_3 й S_4. Запаси ресурсів, кількість одиниць ресурсів, необхідних для виготовлення одиниці продукції, наведені в таблиці (цифри умовні).

Вид ресурсу	Запас ресурсу	Кількість одиниць ресурсів, необхідних для виготовлення одиниці продукції	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	–	1
S_4	21	3	–

Прибуток, що одержується від одиниці продукції P_1 і P_2, відповідно 2 й 3 грн.

Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Методичні вказівки

Нехай при випуску n видів продукції використовується m видів ресурсів.

Позначимо x_j (j = 1, 2, ..., n) – кількість одиниць продукції P_j, запланованої до виробництва; b_i (i =1, 2, ..., n) – запас ресурсу S_i; a_{ij} – кількість одиниць ресурсу S_i, що затрачується на виготовлення одиниці продукції P_j (числа a_{ij} часто називають технологічними коефіцієнтами); c_j – прибуток від реалізації одиниці продукції P_j.

Тоді економіко-математична модель задачі про використання ресурсів у загальній постановці набуде вигляду: знайти такий план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ випуску продукції, що задовольняє системі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{1}$$

і умові

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \tag{2}$$

при якому функція

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{3}$$

набуває максимального значення.

Задача 2. *Задача складання раціону (задача про дієту, задача про суміші)*

Є два види корму І й ІІ, що містять поживні речовини (вітаміни) S_1, S_2, S_3. Зміст кількості одиниць поживних речовин у 1 кг кожного виду корму й необхідний мінімум поживних речовин наведені у таблиці (цифри умовні).

Поживна речовина (вітамін)	Необхідний мінімум поживних речовин	Кількість одиниць поживних речовин у 1 кг корму	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Вартість 1 кг корму I й II відповідно дорівнює 4 й 6 грн.

Необхідно скласти денний раціон, що має мінімальну вартість, в якому зміст кожного виду поживних речовин було б не менш установленої межі.

Методичні вказівки

Нехай при відгодівлі тварин використовується n видів кормів, що містять m поживних речовин. Позначимо: x_j (j = 1, 2, ..., n) – кількість одиниць корму n-го виду; b_i (i =1, 2, ..., m) – необхідний мінімум змісту в раціоні поживної речовини S_i; a_{ij} – кількість одиниць поживної речовини S_i в одиниці корму j-го виду; c_j – вартість одиниці корму j-го виду. Тоді економіко-математична модель задачі набуде вигляду:

знайти такий раціон $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *що задовольняє системі*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \quad (4)$$

і умові

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \quad (5)$$

при якому функція

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (6)$$

набуває мінімального значення.

Задача 3. *Задача про розкрій матеріалів*

Для виготовлення брусів довжиною 1,2 м, 3 м й 5 м у співвідношенні 2 : 1 : 3 на розпил надходять 195 колод довжиною 6 м. Визначити план розпилу, що забезпечує максимальну кількість комплектів. Скласти економіко-математичну модель задачі.

Методичні вказівки

Позначимо x_i – кількість одиниць матеріалу, що розкроюють i-м способом, і x – кількість комплектів виробів, що виготовляються.

Оскільки загальна кількість матеріалу дорівнює сумі його одиниць, що розкроюють різними способами, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a. \tag{7}$$

Вимога комплектності виразиться рівняннями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} = b_k x. \left(k = 1, 2, \ldots, l\right). \tag{8}$$

Очевидно, що

$$x_i \geq 0 \left(i = 1, 2, \ldots, n\right). \tag{9}$$

Економіко-математична модель задачі: *знайти такий розв'язок* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *що задовольняє системі рівнянь* (7)–(8) *і умові* (9), *при якому функція* $F = x$ *набуває максимального значення.*

Задача 4. *Графічний метод розв'язування ЗЛП*

Розв'язати графічним методом таку ЗЛП:

$$Z = -3x_1 - x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12, \\ 4x_1 - 6x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \leq 5, \\ x_2 \geq 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Методичні вказівки

Алгоритм графічного методу розв'язування ЗЛП

1. Побудуємо прямі лінії, рівняння яких одержимо заміною в обмеженнях знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначимо напівплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знайдемо багатокутник розв'язків ЗЛП.

4. Побудуємо вектор $\overline{N}=(c_1;c_2)$, що задає напрямок зростання значень цільової функції задачі.

5. Побудуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\overline{N}=(c_1;c_2)$.

6. Переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ у напрямку вектора $\overline{N}=(c_1;c_2)$ (для задачі максимізації) або у протилежному напрямку (для задачі мінімізації), знайдемо вершину багатокутника розв'язків (останню спільну точку графіка цільової функції й ОДР), де цільова функція досягає екстремального значення.

7. Визначимо координати точки, в якій цільова функція досягає максимального (мінімального) значення й обчислимо екстремальне значення цільової функції у цій точці.

Задача 5. *Симплекс-метод розв'язання ЗЛП*

Використовуючи симплекс-метод, знайти мінімальне значення лінійної функції

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, 3).$$

Методичні вказівки

Алгоритм розв'язування ЗЛП симплекс-методом

1. Визначення початкового опорного плану ЗЛП.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $Z_j - C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв'язувального елемента й розрахунком нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій, починаючи з п. 3.

Задача 6. *Метод штучного базису*

Знайти

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \to \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380, \\ x_3 \ge 9, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1, 4}\right).$$

Методичні вказівки

Алгоритм розв'язування ЗЛП методом штучного базису

Припускаючи, що $b_i \ge 0 \left(i = \overline{1, m}\right)$, введемо у кожне рівняння-обмеження по одній невід'ємній змінній $x_{n+i} \ge 0 \left(i = \overline{1, m}\right)$, які будемо називати **штучними,** а із цільової функції віднімемо суму штучних змінних, помножену на будь-яке велике додане число М (при розв'язанні задачі на max).

У результаті одержимо так звану М-задачу:

знайти

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max; \tag{10}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \ \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{11}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(\overline{1, n+m}\right). \tag{12}$$

У системі (11) змінні x_{n+i} $\left(i = \overline{1, m}\right)$ утворюють **базис**, що називається **штучним**. При $x_1 = \ldots = x_n = 0$ з (11) одержимо початковий опорний план $X_0 = (0, \ldots 0, b_1 \ldots b_m)$ М-задачі.

Далі задача розв'язується на основі застосування *алгоритму симплекс-методу*.

Задача 7. *Двоїста ЗЛП*

Скласти задачу, двоїсту такій задачі:

$$Z = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Методичні вказівки

Правила побудови двоїстих задач

1. Звести всі нерівності системи обмежень вихідної задачі до одного змісту: якщо у вихідній задачі шукають максимум лінійної функції, то всі нерівності системи обмежень звести до вигляду «≤», а якщо мінімум – до вигляду «≥». Нерівності, в яких дана вимога не виконується, помножити на (–1).

2. Скласти розширену матрицю системи A_1, в яку включити матрицю коефіцієнтів при змінних A, стовпець вільних членів системи обмежень і рядок коефіцієнтів при змінних у лінійній функції.

3. Знайти матрицю A_1', транспоновану до матриці A.

4. Сформулювати двоїсту задачу на підставі отриманої матриці A_1' й умови невід'ємності змінних.

Задача 8. *Двоїста ЗЛП*

Для поданої ЗЛП скласти двоїсту задачу та розв'язати її графічно. Визначити оптимальний план прямої задачі, застосувавши другу теорему двоїстості.

$$Z = 3x_1 - x_3 + 12x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 \qquad\quad + x_4 = 2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,4}.$$

Методичні вказівки

1. Побудувати двоїсту ЗЛП.

2. Розв'язати її графічними методом.

3. Для визначення оптимального вектора вихідної задачі $\vec{X}_{opt} = \left(x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0\right)$, за другою теоремою двоїстості скласти умови доповнювальної нежорсткості:

$$1)\ x_j^0\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 - c_j\right) = 0,\ j = \overline{1,n};\quad 2)\ y_i^0\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^0 - b_i\right) = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

4. Перевірити розв'язок за першою теоремою двоїстості: $Z_{\min} = F_{\max}$.

Задача 9. *Метод Гоморі*

Знайти

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\ (j = 1, 2, 3).$$

$$x_j \in Z.$$

Методичні вказівки

Алгоритм методу Гоморі

1. Знаходиться розв'язок послабленої ЗЛП симплекс-методом. Якщо серед елементів оптимального плану ЗЛП немає дробових чисел, то цей план є оптимальним і для ЗЦП. Оптимальний план ЗЛП при цьому називається умовно-оптимальним для ЗЦП.

2. Якщо в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то серед них вибирається те, що має найбільшу дробову частину. На його основі (на основі елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому міститься це значення) формується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_i\}, \tag{13}$$

де $\{\ \}$ – дробова частина числа: $\{q\} = q - [q]$, де $[\ ]$ – ціла частина числа.

3. Сформоване додаткове обмеження (13) після зведення його до канонічного вигляду та введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, що містить умовно-оптимальний план. Отриману при цьому розширену задачу розв'язують, а далі перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то здійснюється перехід до кроку 2 цього алгоритму. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що ЗЦП не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Задача 10. *Метод «гілок і меж»*

Розв'язати ЗЦП задачі 9 методом «гілок і меж».

Методичні вказівки

Алгоритм методу «гілок і меж»

1. За допомогою симплексного методу розв'язується послаблена ЗЦП. Тобто на першому кроці знаходиться умовно-оптимальний план ЗЦП. Якщо деяка компонента x_j^* опорного плану останньої симплексної таблиці, тобто компонента умовно-оптимального плану ЗЦП є дробовою, то, очевидно, можна стверджувати, що в інтервалі ($[x_j^*]$; $[x_j^*]+1$) цілих значень взагалі немає.

2. Для однієї з дробових компонент x_j^* опорного плану останньої симплексної таблиці формуються додаткові обмеження

$$x_j \le \left[x_j^*\right], \quad x_j \ge \left[x_j^*\right]+1. \qquad (14)$$

3. Початкова задача цілочислового програмування розбивається на дві задачі з урахуванням умов цілочисловості змінних і додаткових обмежень (14).

При цьому останні матимуть такий вигляд.

Перша задача

Знайти

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \qquad (15)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, \ge, =\} b_i, \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (16)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (17)$$

$$x_j \in Z, \qquad (18)$$

$$x_j \le \left[x_j^*\right]. \qquad (19)$$

Друга задача

Знайти

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \qquad (20)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, \ge, =\} b_i, \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (21)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (22)$$

$$x_j \in Z, \qquad (23)$$

$$x_j \ge \left[x_j^*\right]+1. \qquad (24)$$

4. Далі симплекс-методом розв’язуються послаблені задачі (15)−(18) і (20)−(23), тобто відповідні ЗЛП без обмежень (19) і (24). Якщо знайдені оптимальні плани цих задач задовольняють умові цілочисловості, то ці плани визначають розв’язок початкової ЗЦП. Інакше пошук розв’язку задачі триває.

Для подальшого розгалуження береться задача з більшим значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на max, і з меншим значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на min. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий план – оптимальний.

Зауваження. Розв'язування цілочислових задач методом «гілок і меж» можна значно прискорити, приєднуючи обмеження виду (19) і (24) до останньої симплекс-таблиці не початкової ЗЦП, а відповідних задач.

Задача 11. *Графічний метод розв'язування ЗНП*

Знайти мінімальне значення сепарабельної функції

$$Z = \left(x_1 - 4\right)^2 + \left(x_2 - 6\right)^2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Методичні вказівки

Одним із найпростіших типів ЗНП є ЗНП із двома змінними. Такі задачі мають такий вигляд:

знайти

$$Z = f\left(x_1, x_2\right) \to \max\left(\min\right) \tag{25}$$

при

$$g_i\left(x_1, x_2\right)\left\{\leq, \geq, =\right\} b_i \ \left(i = \overline{1, m}\right). \tag{26}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{27}$$

Алгоритм графічного методу

1. Будуємо ОДР, що визначається обмеженнями (26)–(27).
2. Будуємо лінії рівня, які визначаються цільовою функцією (25).
3. Встановлюємо точки, що підозрілі на екстремум. Такими точками є точки, що належать і графіку цільової функції, і ОДР, і які в достатньо малому своєму околі інших точок ОДР не містять.
4. Знаходимо значення цільової функції (25) у знайдених точках і серед них вибираються ті, в яких досягається найбільше й найменше значен-

ня. В окремих випадках на основі застосування достатніх умов екстремуму визначаються точки екстремуму.

Задача 12. *Метод множників Лагранжа*

Знайти умовний екстремум функції $f = 6 - 4x_1 - 3x_2$, якщо $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Методичні вказівки

Умовним екстремумом функції $f(x_1, x_2)$ називається максимум або мінімум цієї функції, досягнутий за умови, що x_1 й x_2 задовольняють додатковій умові (рівнянню зв'язку) $\varphi(x_1, x_2) = b$.

Умовний екстремум функції $f(x_1, x_2)$ при існуванні додаткового обмеження $\varphi(x_1, x_2) = b$ знаходять за допомогою *функції Лагранжа*

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[b - \varphi(x_1, x_2)],$$

де λ – невід'ємний сталий множник (множник Лагранжа), безумовний екстремум якого збігається з умовним екстремумом даної функції $f(x_1, x_2)$.

Необхідна умова екстремуму зводиться до існування розв'язку системи трьох рівнянь із трьома невідомими

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b - \varphi(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Є й *достатні умови*, при виконанні яких розв'язок (x_1, x_2, λ) системи визначає точку (стаціонарну), в якій $f(x_1, x_2)$ досягає екстремуму. Це питання розв'язується на підставі вивчення знака диференціала другого порядку d^2L. Оскільки в стаціонарній точці повний диференціал функції $\varphi(x_1, x_2)$ дорівнює нулю, тобто

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 = 0, \left(dx_1^2 + dx_2^2 \neq 0\right),$$

і, крім того, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0$, то диференціал 2-го порядку функції L дорівнює

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}dx_2^2.$$

Функція $f(x_1, x_2)$ в стаціонарній точці (x_1, x_2, λ) має умовний максимум, якщо в ній $d^2L < 0$, і умовний мінімум, якщо $d^2L > 0$.

Задача 13. *Теорія ігор*

Визначити нижню та верхню ціни для ігор, заданих платіжними матрицями A_1 та A_2. Встановити, яка з ігор має сідлову точку. Визначити при можливості ціну гри.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Методичні вказівки

Позначимо через α_i найменший виграш гравця *A* при виборі ним стратегії A_i для всіх можливих стратегій гравця *B* (найменше число в *i*-му рядку платіжної матриці), тобто

$$\min_{j=1,\dots,n} a_{ij} = \alpha_i. \quad (28)$$

Серед всіх чисел α_i (i = 1, 2, ..., n) виберемо найбільше $\alpha = \max_{i=1,\dots,m} \alpha_i$. Назвемо α *нижньою ціною гри, або максимальним виграшем (максиміном)*. Це гарантований виграш гравця *A* при будь-якій стратегії гравця *B*. Отже,

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \quad (29)$$

Стратегія, що відповідає максиміну, називається максиміною стратегією. Гравець *B* зацікавлений у тому, щоб зменшити виграш гравця *A*, вибираючи стратегію B_j, він враховує максимально можливий при цьому виграш для *A*. Позначимо

$$\beta_j = \max_i a_{ij}. \quad (30)$$

Серед всіх чисел β_j виберемо найменше $\beta = \min_{j=1,\dots,n} \beta_j$ й назвемо β *верхньою ціною гри, або мінімаксним виграшем (мінімаксом)*. Це гарантований програш гравця *B*. Отже,

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \quad (31)$$

Стратегія, що відповідає мінімаксу, називається мінімаксною стратегією.

Фактично виграш гравця A при розумних діях гравців обмежений нижньою й верхньою цінами гри. Якщо вирази рівні, тобто

$$\alpha = \beta \text{ або } \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v, \qquad (32)$$

то гра називається *грою із сідловою точкою*, а число v – *ціною гри*.

Елемент $a_{i_0 j_0} = v$ у матриці гри є одночасно мінімальним у рядку i_0 і максимальним у стовпці j_0 та називається *сідловою точкою*.

Задача 14. *Парний регресійний аналіз*

Є залежність між змінним видобутком вугілля на одного робітника Y і потужністю шару X за даними десяти шахт ($n = 10$)

Номер шахти	x	y
1	2	3
1	8	5
2	11	10
3	12	10
4	9	7
5	8	5
6	8	6
7	9	6
8	9	5
9	8	6
10	12	8

Необхідно визначити параметри рівняння регресії, довірчі інтервали для $M_x(Y)$, y_0^*, β_1, σ^2, перевірити значущість рівняння регресії, обчислити коефіцієнт детермінації.

Методичні вказівки

Будемо вважати, що залежність між змінними лінійна:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \text{ або } \hat{y} - \bar{y} = b_1 (x - \bar{x}).$$

Вибірковий коефіцієнт регресії має вигляд:

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{K_{XY}}{s_x^2}, \tag{33}$$

де K_{XY} – вибірковий кореляційний момент або вибіркова кореляція; s_x^2 – вибіркова дисперсія змінної *X*:

$$K_{XY} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y};\ s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2,$$

де відповідні середні визначаються за формулами:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n};\ \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n};\ \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n};\ \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}.$$

Тоді $b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$.

Вибірковий коефіцієнт кореляції визначається за формулою

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}. \tag{34}$$

Довірчі інтервали для:

1) умовного математичного очікування $M_x(Y)$:

$$\hat{y}_0 - t_{1-\alpha;\,k} \cdot s_{\hat{y}_0} \le M_x(Y) \le \hat{y}_0 + t_{1-\alpha;\,k} \cdot s_{\hat{y}_0},$$

де $s_{\hat{y}_0}^2 = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right)$.

2) індивідуального значення y_0^*:

$$\hat{y}_0 - t_{1-\alpha;\,k} \cdot s_{y_0^*} \le y_0^* \le \hat{y}_0 + t_{1-\alpha;\,k} \cdot s_{y_0^*},$$

де $s_{y_0^*}^2 = s_{\hat{y}}^2 + s^2$; $s_{y_0^*}^2 = s^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right)$.

3) параметра β_1:

$$b_1 - t_{1-\alpha;\,k} \cdot \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}} \le \beta_1 \le b_1 + t_{1-\alpha;\,k} \cdot \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}}.$$

4) дисперсії збурювань σ^2:

$$\frac{ns^2}{\chi^2_{\alpha/2;\,n-2}} \le \sigma^2 \le \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;\,n-2}}.$$

Значущість. Рівняння парної регресії (або коефіцієнт регресії b_1) *значуще* на рівні α, якщо спостережуване значення статистики $t = \frac{b_1}{s}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$ за абсолютною величиною більше табличного значення $t_{1-\alpha;\,k}$.

Коефіцієнт детермінації обчислюється за допомогою такої формули:

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q} = 1 - \frac{Q_e}{Q}, \tag{35}$$

де Q – загальна сума квадратів відхилень залежної змінної від середньої; Q_R – сума квадратів, що обумовлена регресією; Q_e – сума квадратів, що обумовлена неврахованими факторами.

Задача 15. *Множинний регресійний аналіз*

Є дані про змінний видобуток вугілля на одного робітника Y (т), потужність шару X_1 (м) і рівень механізації робіт X_2 (%). Припускаючи, що між цими змінними існує лінійна залежність, знайти рівняння множинної регресії.

i	x_{i1}	x_{i2}	y_i
1	8	5	5
2	11	8	10
3	12	8	10
4	9	5	7
5	8	7	5
6	8	8	6
7	9	6	6
8	9	4	5
9	8	5	6
10	12	7	8

Методичні рекомендації

Якщо зв'язок між змінними лінійний, тоді *модель множинної регресії* має вигляд:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \qquad (36)$$

де $i = \overline{1, n}$; y_i – залежна змінна; x_i – i-те спостереження відповідних факторів.

Введемо такі позначення:

1) $Y = (y_1, y_2, \ldots y_n)'$ називається матрицею-стовпцем (або вектором) залежної змінної Y.

2) $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{np} \end{pmatrix}$ – називається *матрицею значень факторів*, або *матрицею плану* розміру $n \times (p+1)$.

3) $\beta = (\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \ldots \quad \beta_p)'$ – *матриця-стовпець (вектор) параметрів.*

4) $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_p \end{pmatrix}'$ – *матриця-стовпець (вектор) збурювань.*

Тоді система рівнянь (35) у матричній формі має вигляд:

$$Y = X\beta + \varepsilon. \tag{37}$$

Вибірковою оцінкою цієї моделі є:

$$Y = Xb + e, \tag{38}$$

де $b = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_p \end{pmatrix}'$, $e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}'$.

Вектор оцінок параметрів визначається за формулою:

$$b = \left(X'X\right)^{-1} X'Y. \tag{39}$$

Алгоритм знаходження оберненої матриці $\left(X'X\right)^{-1}$:

1. Знайти *визначник матриці* $\Delta\left(X'X\right)$.

2. Знайти *транспоновану матрицю:* $\left(X'X\right)' = X'X$.

3. Знайти *приєднану матрицю* $\left(X'X\right)^S$, її елементами є алгебричні доповнення відповідних елементів матриці $X'X$.

4. Знайти обернену матрицю $\left(X'X\right)^{-1} = \dfrac{1}{\Delta\left(X'X\right)} \cdot \left(X'X\right)^S$.

3. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Індивідуальна робота з даного курсу є підсумковим завданням, яке спрямоване на вдосконалення навичок самостійної роботи із закріпленням тих знань, які були отримані під час його викладання.

Робота необмежена в обсязі, але в цілому вона має бути викладена на 10–20 сторінках з написанням змісту та обов'язково зі списком використаної літератури з посиланнями на неї за текстом.

Мета роботи формулюється у вигляді очікуваних результатів, які являють собою внесок у практику теми, що розглядається.

Тематика індивідуальних робіт

1. Історія розвитку економіко-математичних методів.
2. Приклади задач лінійного програмування і сформованих на їх основі оптимізаційних моделей.
3. Поняття про вироджений розв'язок та зациклювання при застосуванні симплекс-методу.
4. Аналіз моделей на чутливість. Двоїстий симплекс-метод.
5. Приклади задач цілочислового програмування.
6. Опуклі та увігнуті функції. Градієнтні методи.
7. Приклади задач динамічного програмування.
8. Вибір критерію в умовах невизначеності.
9. Основні положення регресійного аналізу.
10. Оцінка параметрів парної регресійної моделі.
11. Оцінка значущості рівнянь регресії.
12. Коефіцієнт детермінації.
13. Рангова кореляція.
14. Коефіцієнт Спірмена.
15. Довірчі інтервали для коефіцієнтів і функції регресії.
16. Оцінка значущості множинної регресії.

17. Мультиколінеарність.
18. Виділення найбільш суттєвих факторів.
19. Лінійні моделі зі змінною структурою.
20. Фіктивні змінні.
21. Методи визначення гетероскедастичності.
22. Метод максимальної правдоподібності.
23. Моделі адаптивних чекань.
24. Нестаціонарні часові ряди.

4. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. У чому суть та мета дисципліни «Математичне моделювання в економіці та менеджменті»?
2. Що таке захід, операція, альтернативи?
3. Наведіть приклади задач планування економіки та організації виробництва.
4. Що називається моделлю операції?
5. Сформулюйте класичну задачу споживання.
6. Які методи математичного програмування для розв'язання оптимізаційних задач ви знаєте?
7. Що називається математичною моделлю операції?
8. Які загальні вимоги висуваються до математичних моделей?
9. Які спеціальні вимоги до математичних моделей ви знаєте?
10. Наведіть класифікацію математичних моделей за способом їхньої реалізації.
11. Наведіть класифікацію математичних моделей за характером процесів і явищ в об'єкті моделювання.
12. Наведіть класифікацію математичних моделей за характером тієї сторони об'єкта, що моделюється.
13. Сформулюйте загальну задачу лінійного програмування.
14. Що називається оптимальним розв'язком ЗЛП?
15. Які форми запису задачі лінійного програмування ви знаєте?
16. Наведіть правила зведення задачі лінійного програмування до стандартного вигляду.
17. Що називається опуклою множиною? Яку вона має властивість?
18. Наведіть алгоритм геометричного методу розв'язання ЗЛП.
19. Наведіть алгоритм розв'язання ЗЛП симплекс-методом.
20. Що таке виродженість розв'язку ЗЛП?
21. Сформулюйте правило уникнення зациклення при застосуванні симплекс-методу.
22. У чому суть методу штучного базису?
23. Що називається двоїстою задачею? Наведіть властивості взаємно двоїстих задач лінійного програмування.

24. Сформулюйте першу, другу та третю теореми двоїстості.

25. Наведіть особливості побудови економетричної моделі.

26. У чому суть лінійної парної регресії? Надайте визначення вибіркового коефіцієнта кореляції та його властивості.

27. Що означає перевірити значущість рівняння регресії?

28. У чому суть коефіцієнта детермінації, які межі його значень?

29. Що таке рангова кореляція і як вона вимірюється?

30. У чому особливості моделі множинної регресії?

31. Опишіть процедуру покрокового відбору найбільш інформативних факторів.

32. Які моделі називають лінійними регресійними моделями зі змінною структурою?

33. З якою метою вводять фіктивні змінні? Які величини використовують як фіктивні?

34. Наведіть алгоритм методу інструментальних змінних.

35. Як визначаються довірчі інтервали для коефіцієнтів і функції множинної регресії?

36. У чому суть авторегресійної моделі з розподіленими лагами?

37. Наведіть алгоритм двокрокового методу найменших квадратів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Білоцерківський О. Б. Економіко-математичне моделювання : текст лекцій / О. Б. Білоцерківський, О. О. Замула, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ «ХПІ», 2010. – 108 с.

2. Білоцерківський О. Б. Економетрія : навч.-метод. посіб. / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ «ХПІ», 2008. – 80 с.

3. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів спеціальностей 7.050206 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» та 6.030508 «Фінанси» / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ «ХПІ», 2009. – 76 с.

4. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів спеціальностей 6.03060101 «Менеджмент організацій» та 6.03060102 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» / О. Б. Білоцерківський. – Х. : НТУ «ХПІ», 2012. – 40 с.

5. Боровік О. В. Дослідження операцій в економіці : навч. посіб. / О. В. Боровік, Л. В. Боровік. – К. : Центр навчальної літератури, 2007. – 424 с.

6. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – М. : ЮНИТИ, 2006. – 407 с.

7. Клебанова Т. С. Эконометрия : учеб. пособ. / Т. С. Клебанова, Н. А. Дубровина, Е. В. Раевнева. – Х. : ИНЖЭК, 2005. – 160 с.

8. Кремер Н. Ш. Эконометрика : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 311 с.

9. Наконечний С. І. Економетрія : підручник / С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко, Т. П. Романюк. – К. : КНЕУ, 2005. – 520 с.

10. Лугінін О. Є. Економетрія : навч. посіб. / О. Є. Лугінін, С. В. Білоусова, О. М. Білоусов. – К. : Центр навчальної літератури, 2005. – 252 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи з курсу
«Математичне моделювання в економіці та менеджменті»
для студентів спеціальностей
6.03060101 «Менеджмент організацій та адміністрування»
та 6.03060104 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності»

Укладачі: **БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ** Олександр Борисович
ШИРЯЄВА Наталя Володимирівна

Відповідальний за випуск В. А. Міщенко

Роботу до видання рекомендував П. В. Брінь

Редактор Н. В. Верстюк

План 2015 р., поз. 154
Підп. до друку . . . Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.
Наклад 50 прим. Зам №____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ «ХПІ».
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21